

Peter Heinlein

Wavelet-Methoden zur Analyse  
mammographischer Bilddaten



Herbert Utz Verlag · Wissenschaft  
München

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme  
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist  
bei Der Deutschen Bibliothek erhältlich

Zugleich: Dissertation, München, Techn. Univ., 2001

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben – auch bei nur auszugsweiser Verwendung – vorbehalten.

Copyright © Herbert Utz Verlag GmbH 2002

ISBN 3-8316-0093-7

Printed in Germany

Herbert Utz Verlag GmbH, München

Tel.: 089/277791-00 – Fax: 089/277791-01

# Einführung

In dieser Arbeit wird eine Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation entwickelt, welche speziell an die Problemstellung der Bildanalyse angepasst ist. Über die Eigenschaften dieser Konstruktion werden neue Resultate für eine Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten gewonnen. Die praktische Verwendbarkeit dieser Diskretisierung wird an einem konkreten Anwendungsbeispiel aus der medizinischen Bildverarbeitung, der digitalen Mammographie, demonstriert. Die dabei erzielten Resultate übertreffen bekannte Arbeiten auf diesem Gebiet.

## Wavelet-Analysis

Die Wavelet-Analysis ist eine Methode zur Signaldarstellung, die in den letzten Jahren in der Mathematik, der Physik und den Ingenieurwissenschaften populär wurde. Die der Wavelet-Theorie zugrunde liegenden Ideen sind jedoch nicht neu. Ihre besondere Leistung besteht darin, dass sie aus verschiedenen mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen bekannte Ansätze in einer einheitlichen Sprache zusammenfasst.

Die Wavelet-Analyse basiert auf einer Integraltransformation, als Wavelet-Transformation bekannt. Allerdings gibt es nicht eine, sondern eine Vielzahl verschiedener kontinuierlicher und diskreter Wavelet-Transformationen. Ihnen gemeinsam ist die Grundidee, Funktionen  $f$  durch Vergleich mit einem Funktionensystem  $(\psi_g)_{g \in G}$  zu analysieren, wobei diesem Funktionensystem eine Struktur zugrunde liegt: Alle Elemente gehen durch gewisse Gruppenoperationen aus einem Erzeugenden  $\psi$ , dem Wavelet, hervor. Weiter kann die Funktion  $f$  aus den Koeffizienten  $\langle f, \psi_g \rangle$  stabil rekonstruiert werden. Für die kontinuierliche Wavelet-Transformation über einer lokalkompakten Gruppe  $G$  lässt sich dies schreiben als

$$f = \int_G \langle f, \psi_g \rangle \psi_g d\mu_G.$$

Zur Motivation der in dieser Arbeit entwickelten Diskretisierung werfen wir einen Blick zurück auf die Entwicklung der Wavelet-Theorie. Ihren Ursprung finden Wavelets bei J.-P. Morlet, der affine Wavelets zur Analyse seismischer Daten einsetzte. Obwohl A. Grossman, J. Morlet und T. Paul [GM84] früh erkannt haben, dass den Wavelets eine Gruppenstruktur zugrunde liegt, wurde diese Richtung nicht weiter verfolgt. Grund dafür war ein anderer Trend, die Multiskalenanalyse, der das Geschehen in den nächsten Jahren dominierte. Y. Meyer und S. Mallat [MH92] erkannten, dass Orthonormalbasen aus Wavelets

konstruiert werden können, I. Daubechies [Dau92] konnte sogar Beispiele mit kompaktem Träger entwickeln. Wavelets werden hier, aus dem Blickwinkel der Approximationstheorie, als Basistransformation betrachtet. Ein schneller Algorithmus brachte den Durchbruch für die praktische Anwendung auf eindimensionale Signale in der digitalen Signalverarbeitung wie z. B. der Nachrichtentechnik.

Die Multiskalenanalyse eignet sich besonders zur Kompression von Daten sowie zur nicht-parametrischen Regression, der Rauschfilterung von Signalen. Hier kommt der Ansatz der Basistransformation zum Tragen. Die Multiskalenanalyse führt für eine große Klasse von Funktionen auf eine dünn besiedelte Darstellung, d. h. viele Koeffizienten sind vom Betrag sehr klein. Jedoch ergeben sich Probleme bei dem Versuch, die Multiskalenanalyse in höhere Dimensionen zu verallgemeinern. Insbesondere affine Operationen wie Rotation können in dem Konzept nicht befriedigend eingesetzt werden. Das strenge Korsett der Orthonormal- oder Riesz-Basis führt zu Restriktionen bei der Konstruktion von Wavelets, die gewisse Skalierungsgleichungen erfüllen müssen. Verallgemeinerungen über Tensorprodukte machen sich insbesondere bei Anwendungen in der Bildverarbeitung durch störende Artefakte bemerkbar, da die Richtungen der Ordinatenachsen bevorzugt werden. Ebenso kann die für die Bildanalyse zentrale Forderung nach einer translationskovarianten Darstellung nicht mit Basen erfüllt werden. Die Multiskalenanalyse eignet sich deshalb, trotz des Namens, nicht für eine präzise Analyse von Bilddaten.

Bei der Problemstellung der Bildanalyse ist man daran interessiert, ein Bild in interpretierbare Bestandteile zu zerlegen, um Informationen über die lokale Struktur zu gewinnen. Affine Operationen, wie Skalierung und Rotation auf dem Wavelet, sind dafür hervorragend geeignet und führen auf unitäre Darstellungen lokalkompakter topologischer Gruppen. Zu jeder quadratintegrierbaren Gruppendarstellung ist kanonisch eine Wavelet-Transformation definiert. Zur eindimensionalen affinen Gruppe gibt es eine natürliche Verallgemeinerung in höhere Dimensionen, die  $m$ -dimensionale Euklidische Gruppe mit Dilatation. Damit erweist sich der darstellungstheoretische Zugang zu Wavelets als für die Bildanalyse besser geeignet [Mur90, Ant98].

Jedoch bleibt das Problem, diese kontinuierlichen Wavelet-Transformationen zu diskretisieren, um sie für praktische Anwendungen zugänglich zu machen. Eine Diskretisierung sollte die Vorteile des kontinuierlichen Ansatzes erhalten, indem für die Bildanalyse wichtige Eigenschaften wie z. B. Translationskovarianz auf die Diskretisierung übertragen werden. Es sollte aber auch eine effiziente Implementation möglich sein.

Eine solche Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformationen wird in dieser Arbeit am Beispiel der digitalen Mammographie entwickelt.

## Digitale Mammographie

In Westeuropa und den USA gilt Brustkrebs als häufigste Todesursache bei Frauen im Alter von 35 bis 55 Jahren. Die Früherkennung von Brustkrebs hat bei dem Ziel, die Sterblichkeitsrate zu senken, eine zentrale Bedeutung. Unter den bildgebenden Verfahren

ist nur die Mammographie, die Röntgenaufnahme der Brust, geeignet, frühe Anzeichen eines Krebstumors abzubilden.

In den letzten Jahren wurde sehr intensiv an automatischen Analyse-Verfahren geforscht, die den Radiologen bei der Identifikation abnormaler Strukturen in Mammographien unterstützen [AU96, WDB<sup>+</sup>93]. Studien zeigen, dass die Befundunsicherheit durch solche Verfahren deutlich verbessert werden kann [AHB<sup>+</sup>93]. Hier spielt besonders die Erkennung und Klassifikation von Mikroverkalkungen eine wesentliche Rolle bei der Krebsfrüherkennung [HK<sup>+</sup>96]. Die Zerlegung des Bildmaterials in Komponenten auf verschiedenen Skalen ist ein natürliches Vorgehen bei der Suche nach Mikroverkalkungen, da diese in verschiedenen Größen auftreten. Deshalb finden sich unter den vorgeschlagenen Verfahren viele Wavelet-basierte Ansätze [CW95, SH96, WK98]. Die hier auftretenden Problemstellungen – von der Rauschunterdrückung und Aufbereitung des Bildes über Segmentation bis zur Extraktion von Merkmalen zur Klassifikation der Verkalkungen – bieten typische Anwendungsfelder für Wavelet-Methoden [AU96, CW95].

In dieser Arbeit wird speziell die Hervorhebung von Mikroverkalkungen in digitalen Mammographien untersucht. Die für diese Aufgabe notwendige Flexibilität bei der Diskretisierung der Skalen und der Wahl des Wavelets ist mit klassischen Wavelet-Frames nicht gegeben. Die neu entwickelte integrierte Wavelet-Transformation wird als die geeignete Lösung für diese Problemstellung vorgestellt. Darüber hinaus wird ein Beitrag zur Rauschfilterung geleistet und Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten für die Detektion von Mikroverkalkungen untersucht.

## Aufbau der Arbeit

Im ersten Kapitel stelle ich bekannte Grundlagen zur Wavelet-Transformation über lokal-kompakten Gruppen zusammen. Speziell wird eine Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten des  $\mathbb{R}^m$  mit einer Dilatationsgruppe  $H$  eingeführt. Für diese wird in den folgenden Kapiteln eine neue Diskretisierung abstrakt untersucht. Ein Spezialfall, die Euklidische Gruppe mit Dilatation, wird im zweiten Teil der Arbeit für die Anwendung auf Mammographie-Bilddaten genutzt.

Es ist bekannt, dass der Bildraum der Wavelet-Transformation als Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern aufgefasst werden kann. Dies nutze ich, um bekannte Aussagen über Eigenschaften von Wavelet-Transformationen als Spezialfälle dieses allgemeineren Kontextes herzuleiten (Korollare 1.22, 1.24 und 1.33). Die Redundanz der Wavelet-Transformation erlaubt eine gewisse Freiheit bei der Wavelet-Synthese. Dies führt auf verallgemeinerte Wavelet-Transformationen, für die jedoch kein reproduzierender Kern mehr existiert (Lemma 1.28). Ich stelle Rekonstruktionsformeln für diesen verallgemeinerten Fall für die oben erwähnte Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten zusammen (Satz 1.29, Lemma 1.34 und Lemma 1.35). Darauf aufbauend führe ich eine alternative Rekonstruktion – die Morlet-Rekonstruktion – in diesem allgemeinen Kontext ein: Für die Wavelet-Transformation zu einer lokalkompakten Gruppe

$G = \mathbb{R}^m \rtimes H$  gilt

$$f = \frac{1}{k_\psi} \int_H \mathcal{W}T_\psi f((h, \cdot)) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h).$$

Ich zeige für diese Rekonstruktion analoge Rekonstruktionsformeln (Proposition 1.38, Satz 1.39 und Satz 1.41). Weiter vergleiche ich die unterschiedlichen Zulässigkeitsbedingungen zwischen klassischer Rekonstruktion und Morlet-Rekonstruktion (Korollare 1.43 und 1.46). Im zweiten Kapitel wird der bekannte Ansatz zur Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation durch Abtasten der Wavelet-Koeffizienten vorgestellt. Die geforderte Translationskovarianz der Diskretisierung führt auf Wavelet-Frames und eine effiziente Implementation mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation. Für die in der Praxis häufig verwendete dyadische Wavelet-Transformation von S. Mallat zeige ich, dass die zweidimensionale Transformation als spezielle Diskretisierung einer kontinuierlichen Gruppe aufgefasst werden kann (Bemerkung 2.24). Sie ist damit einem Tensorproduktansatz überlegen.

Kern meiner Arbeit sind das dritte und vierte Kapitel. Hier führe ich eine alternative Diskretisierung – die integrierte Wavelet-Transformation – ein, welche nicht durch Abtasten, sondern durch lokale Mittelung über Wavelet-Koeffizienten konstruiert wird. Die zugrunde liegende Idee wurde von M. Duval-Destin, M. A. Muschietti und B. Torrésani [DDMT93, MT95] für eindimensionale affine Wavelets formuliert. Im Mittelpunkt steht dort das Ziel, ein kontinuierliches Analogon zur Multiskalenanalyse zu konstruieren. So wurden die Begriffe der Skalierungsfunktion, sowie Skala und Detail von der Multiskalenanalyse auf die kontinuierliche Transformation übertragen. Diese Ansätze verallgemeinere ich in Kapitel 3 auf die Wavelet-Transformation über der  $m$ -dimensionalen Euklidischen Gruppe mit Dilatation  $\mathbb{R}^m \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(m))$ . Damit werden sie für die Bildverarbeitung zugänglich. Das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  zu einem Wavelet  $\psi$  lautet (Definition 3.10)

$$|\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2 := \frac{1}{c_\psi} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} |\widehat{D_a R_\rho \psi}(\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a}.$$

Dieser Definition füge ich einen Phasenfaktor hinzu (Definition 3.15). Er spielt keine Rolle für die Rekonstruktion. Jedoch zeige ich (Sätze 3.16 und 3.19), dass er notwendig ist, falls die integrierte Transformation die kontinuierliche approximieren soll.

Analog werden, auf der in Kapitel 1 untersuchten Morlet-Rekonstruktion aufbauend, Morlet-integrierte Wavelets und eine Morlet-integrierte Wavelet-Transformation definiert.

Neu ist die Betrachtung von Frames aus integrierten Wavelets. Ich zeige, dass integrierte Wavelets auf feste Familien von Faltungoperatoren führen (Satz 3.45) und weiter feste Frames (Sätze 3.46 und 3.49) erzeugen. Diese Eigenschaft ist wesentlich für die Existenz effizienter Algorithmen, da in diesem Fall die aufwendige Berechnung des dualen Frames entfällt (Bemerkung 2.9). Besonders interessant ist, dass dieses Resultat unabhängig von der Wahl der Diskretisierung der Dilatationsgruppe ist. Damit bieten integrierte Wavelets hohe Flexibilität. So kann die Diskretisierung dynamisch an die Erfordernisse der Bildanalyse angepasst werden. Dies ist mit bisher bekannten, durch Abtasten gewonnenen Frames

nicht möglich. Schließlich stelle ich den Zusammenhang zur klassischen Konstruktion von Wavelet-Frames durch Abtasten her (Korollar 3.52).

Die Ideen des Mallat-Algorithmus nutzend, kann ein flexibler Algorithmus mit integrierten Wavelet-Filtern konstruiert werden. Diesen in [MT95] vorgestellten Algorithmus übertrage ich auf den mehrdimensionalen Fall (Satz 3.41). Im Gegensatz zum mehrdimensionalen Mallat-Algorithmus, der nur zwei orthogonale Richtungen erlaubt, kann die Operation der Rotation hier beliebig diskretisiert werden. Damit ist der Algorithmus für die Bildanalyse geeignet. Leider ist er nicht sehr effizient (Lemma 3.44). Deshalb entwickle ich alternativ einen schnellen Algorithmus zur Implementation integrierter Wavelets auf Basis der schnellen Fourier-Transformation (FFT) (Abschnitt 6.6). Beiden Algorithmen ist gemein, dass die große Freiheit bei der Wahl des Wavelets nur noch eine approximative Berechnung der Wavelet-Koeffizienten erlaubt. Für meinen Algorithmus ist aber weiterhin eine exakte Rekonstruktion möglich (Lemma 6.8), für den in [MT95] vorgestellten dagegen nur für Morlet-integrierte Wavelets (Bemerkung 3.43). Diese exakte Rekonstruktion unterscheidet die Implementation integrierter Wavelets von bekannten „naiven“ Implementationen der kontinuierlichen Transformation mit Hilfe der FFT.

Die Charakterisierung der lokalen und punkweisen Regularität einer Funktion durch das Abklingverhalten ihres Wavelet-Koeffizienten entlang Maxima-Linien ist eine der für die Signalanalyse bedeutendsten Eigenschaften der kontinuierlichen Wavelet-Transformation [MZ92]. Diese Charakterisierung der Lipschitz-Regularität wird auch in Kapitel 7 zur Anwendung auf Mammographien für die Konstruktion von Merkmalen genutzt. Für die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation übertrage ich diese Charakterisierung sowohl für lokale Lipschitz-Regularität (Lemma 3.60 und Satz 3.63), wie auch punktweise Lipschitz-Regularität (Satz 3.65) auf die diskrete Transformation. Obwohl die (Morlet-)integrierte Wavelet-Transformation die kontinuierlichen Wavelet-Koeffizienten nur approximiert, enthält sie den für die Bildanalyse wesentlichen Informationsgehalt.

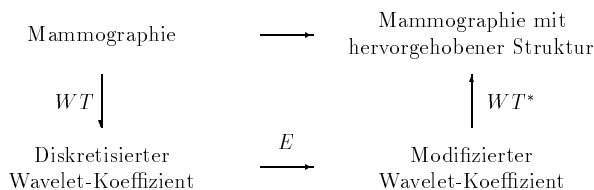
In Kapitel 4 verallgemeinere ich die Diskretisierung durch integrierte bzw. Morlet-integrierte Wavelets auf Wavelet-Transformationen über semidirekte Produkte  $\mathbb{R}^m \rtimes H$  (Definition 4.3). Für allgemeine Gruppen gibt es den gewohnten Begriff der Skala nicht. Ich führe statt dessen ein abstraktes Analogon ein (Definition 4.1).

Die bereits in Kapitel 3 geführten Betrachtungen zur Konstruktion fester Frames übertrage ich auf diesen allgemeinen Fall (Sätze 4.7, 4.9 und Korollar 4.10). Die Diskretisierung mit integrierten Wavelets kann auch als Konstruktion von Wavelets für feste Wavelet-Frames verstanden werden. Bei dieser Betrachtung stellt sich die Frage, wie reichhaltig diese Konstruktion ist. Ich zeige dazu, dass die Konstruktion integrierter und Morlet-integrierter Wavelets als Faltung bezüglich der Dilatationsgruppe  $H$  aufgefasst werden kann (Formel (4.8)). Damit gewinne ich Aussagen über Eigenschaften integrierter Wavelets (Lemma 4.16) und die Injektivität der Konstruktion des integrierten Wavelets bezüglich der Dilatationsgruppe  $\mathbb{R}_+^*$  (Lemma 4.20) und der Rotationsgruppe  $SO(2)$  (Lemma 4.21). Mit Hilfe von Resultaten über die Wiener-Algebra  $A(G)$  kann ich insbesondere zeigen, dass eine große Klasse fester Wavelet-Frames durch integrierte Wavelets erzeugt wird (Sätze 4.35, 4.38 und Korollar 4.36).

Die praktische Verwendbarkeit integrierter Wavelets demonstriere ich im zweiten Teil der Dissertation anhand einer Anwendung in der medizinischen Bildverarbeitung, der digitalen Mammographie.

Kapitel fünf führt in die Problemstellung der digitalen Mammographie ein. Weiter wird das notwendige Werkzeug zur Mustererkennung in der Bildverarbeitung zusammengestellt. Dies sind insbesondere die Konstruktion angepasster Filter sowie die Theorie der Bayes-Klassifikation. Neu ist ein Modell für Mikrokalk, welches die Wahl eines geeigneten Wavelets motiviert.

In Kapitel sechs untersuche ich speziell den Aspekt der Kontrastverbesserung und die Hervorhebung von Mikroverkalkungen in der digitalen Mammographie. Die zugrunde liegende Idee ist, diese Operationen nicht direkt auf dem Bild durchzuführen, sondern das Bild mit Hilfe der Wavelet-Transformation in interpretierbare Bausteine zu zerlegen, auf denen der Operator eine möglichst einfache Gestalt hat.



Die Wahl der Diskretisierung der Wavelet-Transformation spielt nun für die Wirkung eines Operators zur Hervorhebung eine zentrale Rolle. Diesen Zusammenhang diskutiere ich ausführlich und zeige, dass integrierte Wavelets aufgrund Ihrer Flexibilität besonders für diese Aufgabe geeignet sind. Bekannte Resultate zur Hervorhebung von Mikroverkalkungen übertreffe ich durch den Einsatz angepasster Wavelet-Filter (Beispiel 6.19) und der Diskretisierung der Wavelet-Transformation durch integrierte Wavelets (Beispiel 6.20). Aus diesen Ideen habe ich in Kooperation mit der IMAGETOOL GmbH ein neues Verfahren zur Bildanalyse entwickelt, welches im Februar 2000 beim Deutschen Patentamt zum Patent angemeldet wurde.

Mammographien weisen ein sehr schlechtes Signal-Rauschverhältnis auf, da die Strahlendosis zum Schutz der Patientin minimiert wird. Dieses Rauschen ist aufgrund physikalischer Phänomene von sehr komplexer Struktur und macht eine lokale, adaptive Rauschfilterung der Bilddaten notwendig. Eine solche habe ich als Operation auf (Morlet-) integrierten Wavelet-Koeffizienten realisiert (Beispiel 6.14). Dabei erweist sich die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation den klassischen Wavelet-Frames deutlich überlegen (Beispiel 6.13).

Die Arbeit schließt mit einem Kapitel zur Detektion von Mikroverkalkungen. Im Gegensatz zur Hervorhebung, die nur ein für den Betrachter leichter lesbares Bild generiert, wird bei der Detektion mit Hilfe eines Klassifikators eine Entscheidung gefällt, ob ein Bildpunkt Mikrokalk darstellt oder nicht. Es werden neue Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten, die



durch das mathematische Fundament motiviert sind, definiert und exemplarisch untersucht. Diese werden abschließend zur Konstruktion eines speziell an die Hervorhebung von Mikrokalk entwickelten Operators genutzt (Beispiel 7.3).

## Ausblick

Abschließend möchte ich noch mögliche Anknüpfungspunkte für weitere Forschung aufzeigen.

Die in dieser Arbeit behandelten mathematischen Fragestellungen bauen zum Teil auf der Dissertation von H. Führ *Zur Konstruktion von Wavelettransformationen in höheren Dimensionen* [Füh97] auf. Das Hauptziel seiner Arbeit ist die Konstruktion von Wavelet-Transformationen mit Hilfe quadratintegrierbarer Darstellungen. Dabei wird die Frage nach einer Diskretisierung, sowie möglicher Implementation dieser Transformationen gestellt und aufgezeigt, dass bisherige Ansätze zur Diskretisierung für diese neuen Transformationen erhebliche Komplikationen involvieren. Dieses Problem löse ich in Kapitel 4, wenn auch anders als in [Füh97] vorgeschlagen, durch die integrierte Wavelet-Transformation. Eine wichtige offene Frage bleibt die Interpretation und Verwendbarkeit der konstruierten Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ . Die Operation der Translation dient auch in höheren Dimensionen der Lokalisierung, die Rolle verschiedener Dilatationsgruppen  $H$  ist bisher kaum untersucht. Ein Beispiel ist die Arbeit von M. Duval-Destin, der in seiner Dissertation [DD91] die Verarbeitung visueller Reize durch unser Gehirn untersucht. Dort wird in einer Wavelet-Transformation die Dilatationsgruppe  $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$  im Zusammenhang mit Abstand und Bewegung von Objekten aus dem physikalischen Modell motiviert.

In Abschnitt 4.4 skizziere ich Ansätze, wie die Konstruktion integrierter Wavelets weiter verallgemeinert werden kann.

Die Problemstellung der Rauschfilterung tritt in dieser Arbeit an zwei Stellen auf. Zum einen verallgemeinere ich in Abschnitt 5.4 eine Fehlerabschätzung von Orthonormalbasen auf Frames, zum anderen demonstriert Beispiel 6.13, dass die Morlet-Rekonstruktion einer Frame-Rekonstruktion überlegen sein kann. Zur Rauschfilterung in Orthonormalbasen gibt es zahlreiche, tief in die Stochastik reichende weiterführende Ergebnisse, z. B. [DJ94, JS97]. Soweit mir bekannt ist, wurde die Verallgemeinerung auf Frames bisher genauso wenig untersucht, wie Rauschfilterung mit Morlet-Rekonstruktion. Es stellt sich die Frage, inwieweit weitere klassische Ergebnisse übertragen werden können und für welche Regressionsprobleme die jeweiligen Methoden optimal sind.

Zu den in den letzten beiden Kapiteln behandelten angewandten Fragestellungen bieten sich zahlreiche Anknüpfungspunkte in die Ingenieurwissenschaften, wie zum Beispiel Merkmalelektion und Klassifikation.

## Danksagung

Sehr herzlich bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Günter Schlichting und Dr. Hartmut Führ für die ausgezeichnete Betreuung. Besonders danke ich Dr. Hartmut Führ für zahlreiche Anregungen und sein während seines einjährigen Forschungsaufenthaltes in Marseille auch aus großer räumlicher Distanz nicht nachlassendes Interesse am Fortschritt meiner Arbeit.

Ein ebenso herzlicher Dank geht an Herrn Dr. habil. Wilfried Schneider, Geschäftsführer der IMAGETOOL GmbH, Berlin, der mich in die Problemstellung der computergestützten Analyse digitaler Mammographien eingeführt und die Entwicklung der Anwendung intensiv betreut hat. Den Mitarbeitern der IMAGETOOL GmbH, insbesondere Herrn Johann Drexl, danke ich für die aktive konstruktive Kritik.

Für wertvolle Anregungen und Diskussion zu Fragestellungen der Wavelet- und Fourier-Analyse danke ich Prof. Bruno Torrèsani, Universität Marseille, Prof. Hans G. Feichtinger, Universität Wien, Prof. Jean-Pierre Kahane, Université Paris Orsay, sowie Prof. Stéphane Jaffard, Université Paris XII.

Frau Prof. Kessler und Frau Dr. Gregor vom Klinikum Großhadern danke ich für die mir gewährten Einblicke in die medizinische Seite der Mammadiagnostik. Ebenso danke ich Herrn Dr. Bick und Herrn Dr. Dieckmann von der Charité der Humboldt Universität Berlin.

Bei Herrn Prof. Peter Gritzmann und Dr. Andreas Brieden bedanke ich mich für die produktiven Rahmenbedingungen im Graduiertenkolleg Angewandte Algorithmische Mathematik. Meinen Mitstipendiaten danke ich für die angenehme Atmosphäre und gute Zusammenarbeit.

Mein besonderer Dank gilt Brigitte.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kontinuierliche Wavelet-Transformation</b>	<b>1</b>
1.1	Definition der Wavelet-Transformation	1
1.2	Wavelets über semidirekten Produkten	3
1.3	Wavelets über der Euklidischen Gruppe mit Dilatation	5
1.4	Charakterisierung des Bildes als Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern	9
1.5	Klassische Wavelet-Synthese	14
1.5.1	Allgemeine Rekonstruktionswavelets	14
1.5.2	Normkonvergenz der Rekonstruktion	19
1.6	Morlet-Rekonstruktion	22
<b>2</b>	<b>Diskretisierung</b>	<b>29</b>
2.1	Multiskalenanalyse	29
2.2	Frames	33
2.3	Semidiskrete Wavelet-Transformation	37
2.3.1	Diskretisierung der Skalen	38
2.3.2	Die eindimensionale dyadische Transformation	42
2.3.3	Die zweidimensionale dyadische Transformation	44
<b>3</b>	<b>Integrierte Wavelet-Transformation</b>	<b>49</b>
3.1	Skala und Detail	50
3.2	Integrierte Wavelet-Transformation	53
3.2.1	Zur Lokalisierung des integrierten Wavelets	56
3.2.2	Konstruktion orientierter Filter	59
3.3	Ein kontinuierliches Analogon zur Multiskalenanalyse	64
3.4	Morlet-integrierte Wavelet-Transformation	65
3.5	Approximative Filter	69
3.6	Konstruktion fester Frames	74
3.7	Lokale Regularitätsanalyse	79
3.7.1	Abklingverhalten der Wavelet-Koeffizienten	81
3.7.2	Regularität der Funktion	82

<b>4</b>	<b>Verallgemeinerung der integrierten Wavelet-Transformation</b>	<b>87</b>
4.1	Frames aus integrierten Wavelets . . . . .	88
4.1.1	Verallgemeinerte Skalen . . . . .	88
4.1.2	Verallgemeinerte Frame-Konstruktion . . . . .	90
4.1.3	Nicht bandbeschränkte Wavelets . . . . .	93
4.2	Injektivität der Konstruktion integrierter Wavelets . . . . .	95
4.2.1	Reelle Dilatation . . . . .	98
4.2.2	Rotation . . . . .	100
4.3	Zur Charakterisierung fester Familien integrierter Wavelets . . . . .	102
4.3.1	Reelle Dilatation . . . . .	103
4.3.2	Rotation . . . . .	110
4.3.3	Feste integrierte Wavelet Frames . . . . .	112
4.4	Ausblick . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Grundlagen zur Anwendung in der digitalen Mammographie</b>	<b>115</b>
5.1	Digitale Mammographie . . . . .	115
5.2	Modell für mikrokalkförmige Strukturen . . . . .	121
5.3	Grundlagen zur Mustererkennung in der digitalen Bildverarbeitung . . . . .	124
5.3.1	Angepasste Filter . . . . .	124
5.3.2	Mustererkennung . . . . .	127
5.3.3	Bayes'sche Klassifikation . . . . .	128
5.4	Nichtlineare Rauschfilterung mit Wavelets . . . . .	131
5.4.1	Rauschfilterung in Orthogonalbasen . . . . .	131
5.4.2	Nichtstationäre Rauschfilterung . . . . .	134
5.4.3	Rauschfilterung in Frames . . . . .	135
<b>6</b>	<b>Hervorhebung von Mikroverkalkungen</b>	<b>139</b>
6.1	Problemstellung . . . . .	139
6.2	Bekannte Ansätze . . . . .	141
6.3	Hervorhebung mit Frames . . . . .	144
6.4	Interpretation und Wahl des Wavelets . . . . .	146
6.4.1	Angepasste Filter . . . . .	146
6.4.2	Diskretisierte Wavelet-Koeffizienten . . . . .	148
6.5	Wahl des Wavelet-Frames . . . . .	150
6.6	Diskreter Algorithmus . . . . .	154
6.7	Der Enhancement-Operator . . . . .	156
6.8	Rekonstruktion . . . . .	159
6.9	Beispiele . . . . .	161
6.9.1	Rauschfilterung . . . . .	161
6.9.2	Parametrische Kontrastverbesserung . . . . .	168
6.9.3	Spot-Hervorhebung . . . . .	171
6.10	Zusammenfassung . . . . .	181

<b>7</b>	<b>Detektion von Mikroverkalkungen</b>	<b>183</b>
7.1	Literaturüberblick . . . . .	183
7.2	Auf Wavelet-Koeffizienten basierende Merkmale . . . . .	185
7.2.1	Punktweise Lipschitz-Regularität . . . . .	188
7.2.2	Abklingverhalten . . . . .	190
7.2.3	Skala-Winkel Darstellung . . . . .	191
7.2.4	Normierte Korrelation . . . . .	197
7.3	Hervorhebung von Mikrokalk mit skalenübergreifendem Operator . . . . .	200
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>205</b>
A.1	Fourier-Transformation . . . . .	205
A.2	Begriffe der Zeitreihenanalyse . . . . .	206
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>209</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>217</b>
	<b>Index</b>	<b>218</b>