Peter Birke

Und es geht doch!
Wie rational ist irrational?

Näherungsweise Berechnung von Wurzeln natürlicher Zahlen mittels eines divisionsfreien Algorithmus auf eine Genauigkeit von 1000 geltenden Ziffern unter Verwendung eines Home-Computers

UTZ

Herbert Utz Verlag

Grafiken und Layout: Herbert Utz

Satz: Nina Heiß, Vahid Mizan, Gunnar Behrsing

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

ISBN 3-8316-0299-9

Printed in Germany

Herbert Utz Verlag GmbH, München
Tel.: 089/277791-00 – www.utzverlag.de

Inhalt

Vorwort

Die rationalen Zahlen liegen nicht unendlich dicht auf der Zahlengerade, obwohl es unendlich viele von ihnen gibt. Es existiert also immer und immer noch etwas dazwischen. Vielleicht war dies der Gedanke, in Ermangelung einer Vorstellung so etwas dann irrational zu nennen.

Die wohl mit Abstand bekannteste irrationale Zahl ist die Kreiszahl π. Ein beliebtes Spiel für mathematische Denkakrobaten und Anwärter für das Guiness-Buch der Rekorde ist das richtige Aufsagen vieler Nachkommastellen, gemein bekannt sind oftmals nur die ersten zwei bis 3,14... Die zweiten sehr bekannten Vertreter irrationaler Zahlen sind Wurzeln.

Damit ist aber auch gleichzeitig das wesentlichste Merkmal solcher irrationaler Zahlen genannt. Sie besitzen unendlich viele Nachkommastellen und lassen sich damit im Gegensatz zu rationalen Zahlen nicht durch einen Bruch, der einer endlichen oder periodischen Dezimalzahl entspricht, ausdrücken, wohl aber durch Intervallschachtelung zweier rationaler Zahlen, also zweier Brüche, mit endlicher Genauigkeit darstellen. Eine Approximation irrationaler Zahlen mit einer geforderten Genauigkeit von x Nachkommastellen durch rationale Zahlen ist schon insofern nicht trivial, als man fragen muss, ob die irrationale Zahl überhaupt noch im Intervall liegt und wieviel gültige Nachkommastellen die Annäherung durch das gewählte Verfahren überhaupt besitzt.

Gleichzeitig sollte dieses Verfahren auf einem Rechner laufen und mindestens 1000 gültige Nachkommastellen zur Berechnung einer Wurzel liefern in Zeiten, in denen eine 5 Megabyte Festplatte ein teurer, fast unerschwinglicher Luxus und 64 Kilobyte Hauptspeicher viel waren und ein Apple IIe zu den großen ersten Homecomputern zählte. Da jeder Rechner sich mit Divisionen weitaus schwerer tut als mit Multiplikationen, ist ein Verfahren, das bis zur Division eines finalen Näherungsbruches arbeitet, von großem Vorteil. Gerade aber die Division eines solchen Bruches auf beispielsweise 1000 Nachkommastellen auf dem Rechner ist überhaupt nicht trivial. Die Anzeige von weniger als zehn Nachkommastellen auf einem Taschenrechner ist viel weniger das Problem knappen Anzeigeplatzes als das der Rundung. Eine Besonderheit dieser Arbeit ist daher über die eigentliche Themenstellung hinaus die Entwicklung eines solchen Divisionsverfahrens.

Dies zeigt aber auch, dass ein geeigneter Algorithmus sehr viel möglich machen kann und die Verknüpfung von solchen Algorithmen mit heutigen Rechnerleistungen so manche Anstöße für die numerische Simulation aktueller mathematischer Probleme liefern könnte. Der Dialekt der Programmiersprache Applesoft Basic sollte dabei so selbsterklärend und verständlich sein, dass sich der Quellcode auch leicht auf andere Programmiersprachen wie Pascal oder Fortran übertragen lassen müsste. All dies macht die vorliegende Arbeit auch etwas zeitlos und ihr Schema könnte ein Denkanstoß zur Lösung vieler ähnlicher und neuer Aufgaben sein.

Dies war auch einer der wesentlichen Gründe für mich, eine 1986 mit Schreibmaschine und Kopiergerät in Kleinstauflage entstandene Facharbeit 2003 noch einmal professionell wieder auferstehen zu lassen, und ich hoffe, dass sie interessierten Lehrern und Schülern der Mathematik und Informatik gleichermaßen neue Denkanstöße gibt, so wie mir damals ...

Herr Willy Arbeiter – mein damaliger Mathematiklehrer, bei dem ich von der zehnten bis zur dreizehnten Klasse Mathematik gelernt habe – hat die damalige Facharbeit vergeben und betreut, mein Physiklehrer Herr Dieter Härtel – er hat mich von der elften bis zur dreizehnten Klasse in Physik unterrichtet – hat die Zweitkorrektur übernommen. Bei beiden möchte ich mich auf diesem Wege bedanken.

Ellwangen im Frühjahr 2004

Peter Birke